910. 確率法則ノ組類別

國澤　清典（阪大）

二ツノ分布函數ガ與ヘラレ，ソレヲ $F_1(x)$, $F_2(x)$ トスル。

$F_1(x)$ ト $F_2(x)$ ガ同ジ組ニ屬スルト云フノハ適當ナ a, b ヲ選ビ

$$F_1(ax+b) = F_2(x)$$

$$\text{但シ}\quad \infty > a > 0, \quad \infty > b > -b$$

デアル場合、云ヒ換ヘレバ変數ニ一次変換ヲホドコシテオ互ニ得ラレル場合ニ同ジ組ニ屬スルト云フコトニスル。此ノ關係ハ反射律、對称律、移動律ヲ明ラカニ滿足スル故ニ確率法則全体ヲ上ノ様ナ關係デ組類別スルコトガ出來ル。

例ヘバ Gauss ノ法則ハ一ツノ重要ナル確率法則ノ組ヲ作ル。又特別ノ場合トシテ單位法則ガ考ヘラレル。ソレハ

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad x > 0 \\ 0 & \text{for} \quad x \leqq 0 \end{cases}$$

デアル法則ノツクル組，即チ $\mathcal{E}(x-b)$ デアルガ、此ノ組ヲ非固有ナ組[1]ト云ッテ、ソノ他ノ組ヲ固有ナ組ト假ニ云ッテオク。

固有組ノ系列 $K_1, K_2, \cdots\cdots, K_n, \cdots\cdots$ ガ與ヘラレタトキニ $F_1(x)\in K_1$，$F_2(x)\in K_2, \cdots\cdots, F_n(x)\in K_n, \cdots\cdots$ デアルヤウナ分布函数ノ系列ガ存在シテソレガ組Kノ法則 $F(x)$ ニ法則收斂シテオレバ $\{K_n\}$ ハ Khintchin ノ意味デ K ニ組類別收斂ヲナスト定義スル。此ノ組類別收斂ニ關シテハ、次ノ重要ナ定理ヲ A. Khintchin ガ證明シタ。[2]

$\boxed{\text{定理}}$ (Khintchin) スベテノ組系列モ常ニ非固有組ニ組別收斂ヲナシ、又組系列ヲ適當ニトレバ一ツノシカモ一ツニ限ル固有組ニ組別收斂（勿論 Khintchin ノ意味デ）サス事ガ出來ル。

ダカラ非固有組ヘノ組別收斂ハ triviale ナ場合デ今後 Khintchin ノ意味デノ組別收斂ト云ヘバ固有組ヘノ收斂ト解スルコトニスル。又非固有組ヘシカ收斂シナケレバ發散收斂ヲナシテイルト云ッテモ差支ヘナイワケデアル。例ヘバ n 個ノ chance variable ノ和 S_n ヲ適當ニ reduce シテ Gauss ノ法則

---

1) unechte Klasse, classe impropre.

2) A. Khintchin, Mitt. Inst. Math. und Mech. Univ. Tomsk, 1, 1937, PP. 258—261.

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}u^2}du$$

ニ法則收斂サスコトガ出來ルナラバ吾々ハ

$$\lim_{n\to\infty} K(S_n)=G$$

ト書クコトガ出來ル。$K(S_n)$ ハ S_n ノ分布函數ノ屬スル組ヲ，G ハ Gauss ノ法則ノ組ヲ表ハス。

非固有組ヲ除外シテ固有組ヨリ出來ル空間ヲ R ト書クコトニスルト Khintchin ノ定理ヨリ R ハ Fréchet ノ L-space[4] ヲ作ルコトガ容易ニワカルガ W. Doeblin ハ Paris ノ C. R.[5] デ R ハ Khintchin ノ意味ノ topology ト同等ナ距離ヲツケルコトガ出來ナイ例ヲ作ルコトガ出來タト述ベテイルガ何ンナ例デアルカハ具体的ニハ述ベテハイナイ。ソコデ以下 distance ヨリハ弱イガ三角形ノ axiom ノ成立シナイ所謂 Fréchet ノ "écart" ヲ Khintchin ノ意味ノ topology ト同等[6] トナル樣ニ R ニ導入シタイ．Doeblin ハ此ノ点ヲ注意ハシテイルガ何ンナ方法デヤルカ述ベテイナイ．故ニ結局 R ハ E-space[7] トナリ metric space ヨリハ一般トナルガ L-space ヨリハ特殊ナ空間トナル事ガワカッタ。

---

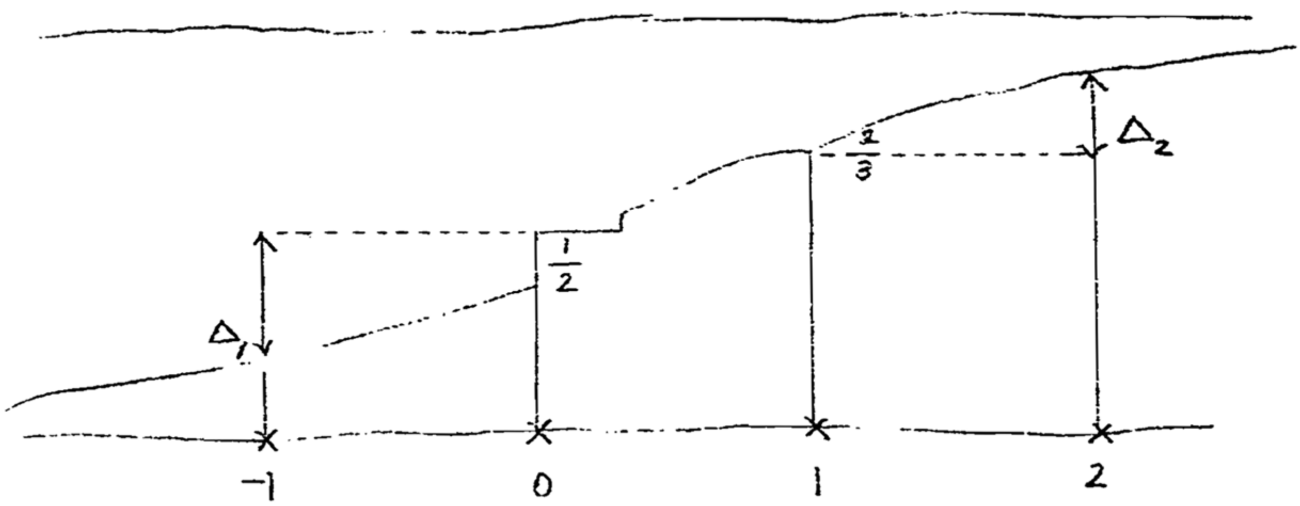
4) 功力金二郎氏　抽象空間論 39 頁

5) C.R. Paris, 206, 1938, PP. 306−308

6) 導來集合ヲ変ヘナイト ノ意味デ

7) 功力金二郎氏　抽象空間論 175 頁

最初ニ法則ノ各組カラ次ノ様ナ代表ヲ取出ス。



即チ *médiane* ガ 0 トナル様ニシ、モシ *médiane* ガ澤山アレバ左端ガ 0 ニ來ル様ニシ、次ニ此ノ様ナ法則 $F(x)$ ニツキ適當ニ $\infty > a > 0$ ナル a ヲトリ $F(ax) = \frac{2}{3}$ ヲ満ス x ガ 1 デアルヤウニシ，若シコノ様ナ x ガ澤山アレバ右端ガ丁度 1 ニ來ルヤウニ a ヲ決メル。此ノヤウナ法則ヲ改メテ $F(x)$ ト置キ代表トスルト、コレハ一意的ニ決マルコトガ容易ニワカル。

スルト $[-1, 0]$ $[1, 2]$ デソレゾレ $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ ナルヤウナ *Positive* Pr ヲモツワケデアル。次ニ *écart* ヲ次ノ様ニ定義スル。

組 K, K' ガアリ，$F(x)$，$F'(x)$ ヲ夫々 K, K' ノ代表法則トシテ K ト K' ノ間ニ次ノヤウナ関係 (K, K') ヲ導入スレバ

$$(K, K') = \inf_a \left[Max\left\{ (F(ax), F'(ax)), \; \left|\frac{1}{a} - a\right| \cdot (F(x), F'(x)) \right\} \right]$$

ガ écart トナルコトヲ証明スル。此処ニ $(F(ax),$
$F'(ax))$ 等ハ P. Levy ノ意味ノ法則距離ヲ示ス。

$\boxed{\text{定理1}}$ 上述ノ (K,K') デ各組ノ間ニ écart ヲツケルコトが出来ル。

(証明) 1. $(K,K)=0$ ハ明ラカ。

2. $(K,K')=0$ ナラバ $K=K'$ ノ証明

(K,K') ノ定義ヨリ

$$\mathrm{Max}\left\{ (F(a_n x), F'(a_n x)),\ \left|\frac{1}{a_n}-a_n\right|\cdot(F(x), F'(x))\right\} \longrightarrow 0$$

が成立スルヤウニ $\{a_n\}$ ヲ取リ出スコトが出来ル。

$(F(x), F'(x))=0$ ナラバ問題ハナク $K=K'$ トナル故ニ
$(F(x), F'(x))\neq 0$ トスル。

$$\left|\frac{1}{a_n}-a_n\right|$$

ヨリ $a_{n_i}\longrightarrow 0$, $a_{n_j}\longrightarrow\infty$ デアルヤウナ subsequence
$\{a_{n_i}\}$ が存在シナイコトハ容易ニワカル. 故ニ適当ニ部分系列ヲ選ンデ $a_{n_i}\longrightarrow 1$.

トスルコトが出来テ

$$F(a_{n_i}x)\longrightarrow F(x)$$
$$F'(a_{n_i}x)\longrightarrow F'(x)$$

故ニ

$$(F(ax), F'(ax))=0$$

トナリ, $K=K'$ が云ヘタ。

3. $K=K'$ ナラバ $K'=K$ ハ明ラカ。 ── 以上 ──

コレデ écart ガ出来タノデ Khintchin ノ topology ト同等デアルコト、此ノ場合デハ即チ導来集合ヲ変ヘナイコトヲ証明スル。

$\boxed{定理2}$ 上述ノ écart ヲ空間 R ニ導入スレバ Khintchin ノ意味ノ topology ト同等トナル。

（証明） 最初ニ écart$(K_n, K) \longrightarrow 0$ トスレバ適當ニ部分系列ヲ取ルト、Khintchin ノ意味デ組別収斂スルコトヲ証明スル。定義ヨリ

$$\begin{aligned}&\mathrm{Max}\{(F_n(a_n x), F(a_n x)),\\&\left|\frac{1}{a_n}-a_n\right|\cdot(F_n(x), F(x))\}\longrightarrow 0\end{aligned}$$

此処ニ F_n 及ビ F ハ各々 K_n, 及ビ K ノ代表法則ヲ示ス。

先ヅ $(F_n(x), F(x)) \longrightarrow 0$ ナラバ問題ナイガ故ニ最初カラ $(F_n(x), F(x)) > \delta > 0$ ト假定シテアッテ良イ。容易ニ subsequence ヲ選ブト

$$a_{n_i} \longrightarrow 1$$

ガ云ヘル、故ニ

$$F(a_{n_i} x) \longrightarrow F(x)$$

トナルコトガワカル。

故ニ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ充分大キイ $N(\varepsilon)$ ヲトルト $n_i > N(\varepsilon)$ ニ對シ

$$\begin{aligned}&(F_{n_i}(a_{n_i} x), F(a_{n_i} x)) < \varepsilon,\\&(F(a_{n_i} x), F(x)) < \varepsilon\end{aligned}$$

故ニ

$$(F_{n_i}(a_{n_i}x), F(x)) < (F_{n_i}(a_{n_i}x), F(a_{n_i}x))$$
$$+(F(a_{n_i}x), F(x)) < 2\varepsilon$$

故ニ

$$F_{n_i}(a_{n_i}x) \longrightarrow F(x)$$

此レヨリ K_{n_i} ハ K ニ Khintchin ノ意味デ組別収斂スル事ガワカッタ、逆ニ

$\{K_n\}$ ガ K ニ Khintchin ノ意味デ組別収斂スルト假定スルト $K_n \ni F_n(a_n x + b_n)$ $n=1,2,3,\cdots$ ガ存在シテ

$$F_n(a_n x + b_n) \longrightarrow F(ax + b)$$

(法則収斂ノ意味デ)

此処ニ $F_n(x)$, $F(x)$ ハ K_n, K ノ代表法則トスル。

Levy ノ意味ノ法則距離ノ性質カラシテ

$$(F_n(a_n x + b_n - b), F(ax))$$
$$= (F_n(a_n x + b_n), F(ax + b))$$

デアルカラシテ最初カラシテ $b = 0$ ト假定シテヨイ。又

$$F_n(a_n x + b_n) \longrightarrow F(ax)$$

(法則収斂ノ意味デ)

ナラバ

$$F_n\left(\frac{a_n x + b_n}{a}\right) \longrightarrow F(x) \quad \text{(法則収斂ノ意味デ)}$$

デアルカラ，最初カラ $F_n(a_n x + b_n)$ ハ $F(x)$ ニ法則収斂シテイルト考ヘテ差支ヘナイ。次ニ組ノ代表法則ノ作リ方カラシテ

$$\left\{\frac{1-b_n}{a_n}\right\},\ \left\{-\frac{b_n}{a_n}\right\} \qquad n=1,2,3,\cdots\cdots$$

ノ中カラ部分系列ヲ取リ出シテ

$$\frac{1-b_{n_i}}{a_{n_i}} \longrightarrow 1,\ -\frac{b_{n_i}}{a_{n_i}} \longrightarrow 0$$

此レカラシテ

$$b_{n_i} \longrightarrow 0,\quad a_{n_i} \longrightarrow 1$$

若シ $F_{n_i}(x)$ ガ $F(x)$ ＝法則収斂シテヰレバ écart ノ作リ方カラシテ

$$(K_{n_i}, K) \longrightarrow 0$$

ソコデ $F_{n_i}(x)$ ガ $F(x)$ ＝法則収斂シテイナイ場合ヲ考ヘレバ良イ。

任意＝ $\varepsilon>0$ ヲ與ヘテモ $n_i>N(\varepsilon)$ デアル凡ウナ n_i ＝ツキ

$$\left|a_{n_i}-\frac{1}{a_{n_i}}\right| \frac{1}{\sqrt{2}} < \varepsilon$$

$$(F_{n_i}(a_{n_i}x+b_{n_i}),\ F(x)) < \varepsilon$$

$$(F(a_{n_i}x+b_{n_i}),\ F(x)) < \varepsilon.$$

故＝

$$\begin{aligned}(F_{n_i}(a_{n_i}x+b_{n_i}),\ F(a_{n_i}x+b_{n_i})) &\leq (F_{n_i}(a_{n_i}x+b_{n_i}),\ F(x)) \\ &\quad + (F(x), F(a_{n_i}x+b_{n_i})) < 2\varepsilon\end{aligned}$$

故＝

$$(F_{n_i}(a_{n_i}x),\ F(a_{n_i}x))$$

$$= (F_{n_i}(a_{n_i}x + b_{n_i}), F(a_{n_i}x + b_{n_i}))$$
$$< 2\varepsilon$$

故ニ　$(K_{n_i}, K) \leqq 2\varepsilon$

$\varepsilon > 0$ ハ任意デアルカラ、K_{n_i} ハ K ニ *écart* デ収斂シテイル事ガワカッタ。　　　　—— 以上 ——